**Лекция 12. (27-04-2020)**

**Евклидовы векторные пространства.**

Пусть ‑ -мерное векторное пространство.

***Определение 1.*** Скалярным произведением двух векторов называется отображение , обладающее свойствами:

1. и верно равенство ‑ линейность по первому аргументу
2. верно равенство ‑ коммутативность,
3. , при этом ‑ положительная определенность.

Из свойства 2) следует, что скалярное произведение линейно и по второму аргументу, то есть это отображение **билинейно**. При вычислениях это отражается в правиле: линейные комбинации векторов скалярно перемножаются по тем же правилам, как и многочлены.

Выберем в базис . Тогда для векторов скалярное произведение , используя свойство билинейности, можно подсчитать так: , где . При этом .

Если ввести в рассмотрение симметрическую матрицу и столбцы , то прямым вычислением показывается, что .

Такая матрица называется ***матрицей скалярного произведения***.

Заметим, что . Из алгебры известно, что положительная определенность гарантируется положительностью всех главных угловых миноров матрицы . Такие матрицы также будем называть положительно определенными.

Пусть выбран другой базис , в котором векторы имеют координаты соответственно. Пусть , где ‑ матрица перехода от базиса к . Тогда

.

Другими словами, зная матрицу скалярного произведения в некотором базисе, можно легко найти матрицу этого скалярного произведения в любом другом базисе.

**Как задать скалярное произведение? Векторное евклидово пространство.**

Для задания скалярного произведения в достаточно задать базис , симметрическую положительно определенную матрицу и договориться, что в любом другом базисе матрица скалярного произведения будет , где ‑ матрица перехода от к .

***Определение 2.*** Векторное пространство, на котором задано скалярное произведение, называется (векторным) ***евклидовым пространством***.

**Длина вектора и угол между векторами.**

***Определение 3.*** Длиной вектора *n-*мерноговекторного евклидового пространства называется число .

**Теорема** (неравенство Коши-Буняковского). Для любых векторов . При этом тогда и только тогда, когда линейно зависимы.

Доказательство разобрать самостоятельно (теорема 23.4 <http://www.elib.bsu.by/handle/123456789/13296>)

Хотя, вот оно:

(. Для неравенство верно. Пусть . Положим . Тогда Домножая обе части последнего неравенства на , получим или ).

***Определение 4.*** Углом между векторами называется число такое, что .

***Определение 5.*** Базис в называется ортонормированным, если базисные векторы имеют единичную длину и попарно ортогональны.

Базис ортонормирован тогда и только тогда, когда матрица скалярного произведения в нем единична, поэтому скалярное произведение в ортонормированном базисе считается по формуле: (сумма произведений соответствующих координат).

**Теорема** (процесс ортогонализации). Пусть конечная линейно независимая система векторов в . Тогда в существует ортогональная система векторов такая, что для системы и эквивалентны, то есть их линейные оболочки совпадают.

Доказательство разобрать самостоятельно (теорема 23.6 <http://www.elib.bsu.by/handle/123456789/13296>).